

Newton's Gesetz aus der Sicht der Quantenmechanik

Das Newtonsche Gesetz $K = mb$ stellt die Grundlage der gesamten klassischen Mechanik einschließlich ihrer formalen Entwicklungen dar. Interessanterweise kann das Gesetz auf recht einfache Weise aus dem Zusammenwirken folgender quantenmechanischer Prinzipien hergeleitet werden: 1) dem Superpositionsprinzip für Zustände, 2) der Planckschen Formel $E = \hbar\omega$ und 3) der Existenz von Orts-Eigenzuständen.

- 1) Das Superpositionsprinzip erlaubt es, daß vor einer Messung ein Überlagerungszustand mit mehreren Möglichkeiten für das Meßergebnis existiert. Sind zum Beispiel im Fall der Energie die Meßwerte E_1, \dots, E_n möglich, gilt:

$$(1) \quad |\text{Überlagerungszustand}\rangle = \sum_{n=1}^N \psi_n |E_n\rangle, \quad \psi_n = \text{komplexe Zahl}$$

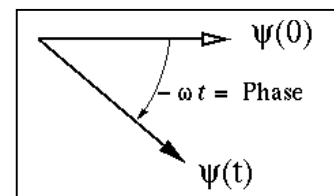
Durch die Messung wird das quantenmechanische Objekt in einen der überlagerten Zustände gezwungen; dabei ist $|\psi_n|^2$ die Wahrscheinlichkeit, mit der E_n als Meßergebnis auftritt.

- 2) Nach der Planckschen Formel sind Energie und (Schwingungs-)Zeit miteinander verknüpft. Falls ein Zustand eine genau definierte "scharfe" Energie hat (Energie-Eigenzustand), so manifestiert sie sich in einem Vorfaktor ψ_n , der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_n = E_n / \hbar$ in der komplexen Zahlenebene rotiert:

$$(2) \quad \psi_n = \psi_n(t) = \psi_n(0)e^{-i\omega_n t}$$

Der allgemeine Zustand (1) ist eine Überlagerung verschiedener Eigenzustände der Energie mit entsprechend unterschiedlich rotierenden Faktoren.

- 3) Das dritte Prinzip besagt: Der Zustand eines (spinlosen) Quantenteilchens ist durch Angabe des Ortes (zur Meßzeit) vollständig bestimmt. Demnach enthält ein Zustand also keine Information über die Bewegungsrichtung; dieses 'Defizit' wird durch das Superpositionsprinzip behoben.



Im folgenden gehen wir von einem eindimensionalen diskretisierten Raum aus (am Ende der Überlegungen erhält man dann im Grenzübergang $a \rightarrow 0$ die 'richtigen' Ergebnisse). Für das Teilchen kommen also nur Orte in Betracht, die im Abstand a entlang einer Geraden angeordnet sind, $x = 0, \pm a, \pm 2a, \dots$. Diese Situation liegt z.B. vor, wenn wir Detektoren der Ausdehnung a verwenden; wird das Teilchen im Detektor n gesehen, so befindet es sich in einem Orts-Eigenzustand $|x\rangle = |na\rangle$.

Zur Herleitung des Newtonschen Gesetzes zerlegen wir den Beschleunigungsvorgang in viele kurze Kraftstöße ($K \cdot \Delta t$ mit $\Delta t \rightarrow 0$ und $K \rightarrow \infty$) mit dazwischen liegenden Abschnitten freier Bewegung. Während eines Kraftstoßes verbleibt das Teilchen an einem Ort und hat praktisch nur potentielle Energie. Zwischen den Stößen, also während der kinetischen Abschnitte, kann das Teilchen in symmetrischer Weise zu den jeweiligen Nachbarorten "hüpfen". Dieses Szenarium

hat den Vorteil, daß Effekte der potentiellen und der kinetischen Energie physikalisch getrennt betrachtet werden können; bemerkenswerterweise entspricht es den Feynman-Graphen, mit denen alle fundamentalen Wechselwirkungsprozesse in der Quantenfeldtheorie beschrieben werden.

Kraft und Impuls

In diesem Abschnitt identifizieren wir den quantenmechanischen Impuls p und zeigen, daß er mit der Kraft K über $K = \dot{p}$ zusammenhängt.

Wir führen die Kraft K (genauer: den Kraftstoß) über eine *potentielle Energie* $U(x)$ ein, die das Teilchen am Ort x hat. Um die Diskussion einfach zu halten, beschränken wir uns dabei auf konstantes K ; dies entspricht der potentiellen Energie $U(x) = -Kx$ (eine mögliche additive Konstante legt nur den Energienullpunkt fest und ist hier irrelevant). Jedem x ordnen wir die potentielle Energie $E = U = -Kx$ zu. Damit ist (in diesem speziellen Szenarium!) ein Orts-Eigenzustand gleichzeitig auch ein Energie-Eigenzustand: $|x_n\rangle = |E_n\rangle$.

Die Energie führt nach (2) zu einem mit der Zeit rotierenden Faktor $\psi_n(t)$.

Diese Rotation in der komplexen Zahlenebene ist *ortsabhängig*, vollzieht sich nämlich am Ort x mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = -Kx/\hbar$.

Beginnen wir mit lauter gleichen Phasenfaktoren zum

Zeitpunkt $t=0$, so haben wir nach einer Zeit τ automatisch eine gleichförmige *Phasendifferenz von Ort zu Ort*. Diese Phasendifferenz wächst mit der Zeit immer weiter an, und zwar in der Form

$$(3) \quad \text{Phase}(x+a) - \text{Phase}(x) = Kat/\hbar$$

Der gewählte Anfangszustand entspricht dem nicht unrealistischen Fall, daß kein Ort vor dem anderen ausgezeichnet ist. Die Orte $x = 0, \pm a, \pm 2a, \dots$ liegen ja im Kontinuum ($a \rightarrow 0$) beliebig nahe beieinander, so daß man in der Praxis gar keinen Zustand präparieren kann, der nicht eine große Zahl benachbarter Orte als gleichberechtigte Möglichkeiten enthält. Wir haben mit (3) eine quantenmechanische Größe gefunden, die unter einer konstanten Kraft K linear mit der Zeit wächst, und zwar ohne daß es noch freie Parameter gäbe. Nach klassischen Vorstellungen wäre eine solche Größe der Impuls $p = Kt$ (bzw. $\Delta p = K\Delta t$ oder $K = \dot{p}$). Es liegt also nahe, den quantenmechanischen Impuls als

$$(4) \quad p = \hbar \frac{\text{Phase}(x+a) - \text{Phase}(x)}{a}$$

zu identifizieren. Der Überlagerungszustand (1) mit den Vorfaktoren (2) und $|E\rangle$

ersetzt durch $|x\rangle$ nimmt damit die Form $\sum_x e^{ipx/\hbar} |x\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |p\rangle$ an, wobei die Summe über

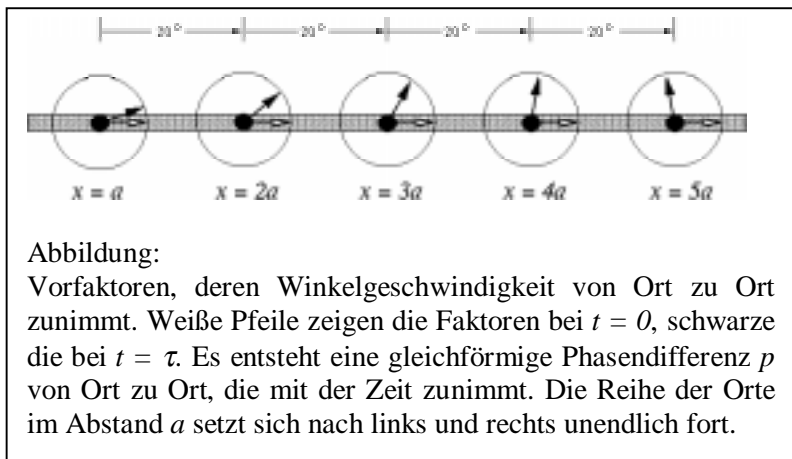


Abbildung:

Vorfaktoren, deren Winkelgeschwindigkeit von Ort zu Ort zunimmt. Weiße Pfeile zeigen die Faktoren bei $t = 0$, schwarze die bei $t = \tau$. Es entsteht eine gleichförmige Phasendifferenz p von Ort zu Ort, die mit der Zeit zunimmt. Die Reihe der Orte im Abstand a setzt sich nach links und rechts unendlich fort.

n als Summe über diskrete Orte x geschrieben wurde. In Anbetracht unseres "Herstellungsverfahrens" für diesen Zustand können wir davon ausgehen, daß es sich um einen Zustand mit "scharfem" Impuls, also um einen Impuls-Eigenzustand $|p\rangle$ handelt. Nebenbei zeigt sich so auch, daß Orts- und Impulszustände in der Quantenmechanik durch eine Fouriertransformation auseinander hervorgehen.

Energie, Impuls und Geschwindigkeit

Nachdem wir durch Analyse der 'Stoßphase' die Gleichung $K = \dot{p}$ etabliert haben, betrachten wir nun die Zeit nach dem Stoß (die potentielle Energie ist jetzt mit $K = 0$ "abgeschaltet"). Ein allgemeines Argument aus der Wellentheorie (*Gruppengeschwindigkeit von Wellenpaketen*) liefert die Geschwindigkeit, die das Teilchen erhalten hat. Dabei geht wesentlich die Annahme ein, daß sich mindestens zwei Zustände mit geringfügig verschiedenen p -Werten überlagern. In der Realität ist dies immer der Fall, weil ein "scharfer" Impuls im Prinzip die Überlagerung *aller* Orte bis ins Unendliche hinein erfordern würde. Unter dieser Annahme kann man bekanntlich zeigen (hier aus Platzgründen unterlassen), daß die Geschwindigkeit v_G gegeben ist durch dE/dp . Da es sich wegen $K = 0$ um reine Bewegungsenergie handelt, erwarten wir eine Beziehung der Form $E = p^2/2m$, wie sie in der klassischen Mechanik gelten würde; die Folge wäre $dE/dp = p/m$ und damit $v_G = p/m$. Zur Herleitung des Newtonschen Gesetzes aus rein quantenmechanischen Prinzipien fehlt somit nur noch eine Begründung für $E = p^2/2m$. Diese Begründung haben wir an anderer Stelle bereits geliefert; sie stützt sich im wesentlichen auf die oben angeführten zwei Prinzipien 'Superposition' und 'Existenz von Ortszuständen'; Einzelheiten finden sich in /1/.

Zusammenfassung

Das Newtonsche Gesetz ergibt sich relativ einfach auf rein quantenmechanischer Grundlage, wenn man einen Beschleunigungsvorgang in viele kurze Kraftstöße mit dazwischen liegenden Abschnitten freier Bewegung aufteilt. Während eines Kraftstoßes verbleibt das Teilchen an einem Ort und kann als statisch angesehen werden; es zählt dann nur seine potentielle Energie, die es unter der Wirkung der Kraft am jeweiligen Ort zugeordnet bekommt, und die zu einer Drehung der quantenmechanischen Phasen am jeweiligen Ort führt. Die Phasendifferenz von Ort zu Ort kann mit dem Impuls des Teilchens identifiziert werden - weil sie im gesamten Vorgang dieselbe Rolle des Vermittlers zwischen Kraft und Bewegung spielt wie der Impuls in der Klassischen Mechanik. Zwischen den Stößen, also während der kinetischen Abschnitte, kann das Teilchen in symmetrischer Weise zu den jeweiligen Nachbarorten "hüpfen"; dies bewirkt eine weitere Drehung der quantenmechanischen Phasen, die nun aber nicht vom Ort, sondern quadratisch vom "Impuls" (der Phasendifferenz von Ort zu Ort) abhängt. Das Phänomen der Beschleunigung ergibt sich daraus in einem allgemein wellenmechanischen Sinn - als zeitlich lineares Anwachsen der Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets.

Literatur

/1/ Jochen Pade und Lutz Polley, Quantenhüpfen auf Gittern: Energie, Impuls und die Schrödingergleichung, Physik in der Schule, Heft 11/1998